令和３年度生　入学選考試験　数学　［特待生入試］

※問題の文中の$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$などには、特に指示がない限り符号（－、±）または数字（0～9）が入ります。

１．　整数 a に対して$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7a-7 \\ x^2-xy+y^2=a+11 \end{cases}$ を満たす実数 x，y を考える。

このとき$x^2+y^2=\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}}$，　$xy=\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エ}}$　であるから

$(x+y)^2=\boxed{\text{オカ}}a-\boxed{\text{キク}}$，　$(x-y)^2=\boxed{\text{ケコ}}a+\boxed{\text{サシ}}$が成り立つ。

⑴　a＝4 のとき，x＞y＞0 を満たす x，y は　$x=\sqrt{\boxed{\text{ス}}}+\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$，　$y=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}-\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$である。

⑵　x，y がともに実数となるのは、a が$\boxed{\text{チ}}$以上$\boxed{\text{ツテ}}$以下の整数のときである。

⑶　x＞y＞0 を満たす整数 x，y が存在するのは $a=\boxed{\text{ト}}$のときであり、このような x，y は $x=\boxed{\text{ナ}}$，　$y=\boxed{\text{ニ}}$である。

２．　実数全体の集合を全体集合とし、その部分集合 A，B，C を

$A=\{x|x^2-x-2\geqq 0\}$　　$B=\{x|x^2+(2a+b)x+a-b\geqq 0\}$　　$C=\{x|x^2+4x+b\geqq 0\}$　とする。

ただし、a，b は実数の定数とする。

⑴　A の補集合を$\overline{A}$で表すと　$\overline{A}=\{x|\boxed{\text{アイ}}<x<\boxed{\text{ウ}}\}$　である。

⑵　A と B が等しくなるのは　$a=\boxed{\text{エオ}}$，　$b=\boxed{\text{カ}}$のときである。

⑶　$\overline{A}$と C の共通部分が空集合となるのは　$b\leqq\boxed{\text{キクケ}}$のときである。

⑷　A と C の和集合が全体集合となるのは　$b\geqq\boxed{\text{コ}}$のときである。

３．　△ABC において　$AB=4\sqrt{5}$，　AC＝5，　AB＜BC　とし、△ABC の外接円の中心を O，直径を$5\sqrt{5}$とする。

$\sin B=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$，　$\sin C=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$　であり、$BC=\boxed{\text{オカ}}$，△ABC の面積は$\boxed{\text{キク}}$であるから、△ABC の内接円の半径は$\boxed{\text{ケ}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$である。

また、内接円と辺 AB との接点を P とすると、$AP=\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}-\boxed{\text{ス}}$である。

さらに、△ABC の外接円と直線 AO の 2 交点のうち、A 以外のものを D とし、2 直線 AO，BC の交点を E とすると　$BD=\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$，　$CD=\boxed{\text{タチ}}$であり　$\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$である。

4．　AB＝BO である二等辺三角形 OAB の内接円の中心（内心）を I とする。辺 OA の延長と点 C で、辺 OB の延長と点 D で接し、辺 AB と接する∠AOB 内の円の中心（傍心）を J とする。さらに、辺 OA の中点を M とする。

$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{オ}}$には、次の①～⑦のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。
ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

①　AO　　②　BO　　③　BA　　④　AJ　　⑤　BJ　　⑥　CJ　　⑦　DJ

(1)　四角形 BMCJ が長方形であることを示そう。

∠ABD＝2∠D$\boxed{\text{ア}}$　　∠ABD＝∠$\boxed{\text{イ}}$A＋∠$\boxed{\text{ウ}}$O＝2∠$\boxed{\text{エ}}$A　であるから、

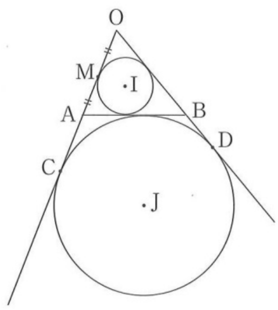
∠D$\boxed{\text{ア}}$＝∠$\boxed{\text{エ}}$A であり　　OA∥$\boxed{\text{オ}}$　　………①　　である。

また、∠BMA＝$\boxed{\text{カキ}}$°，　∠JCO＝$\boxed{\text{クケ}}$°　であるから、四角形 BMCJ は長方形である。

(2)　OA＝4，OB＝7 とする。BM＝$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$であり、B，I，M は同一直線上にあるから、BI＝$\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$である。

また、O，I，J は同一直線上にあるから①より∠BJI＝∠BOI となり、BJ＝$\boxed{\text{ソ}}$である。

さらに、∠IBJ＝$\boxed{\text{タチ}}$°　であるから、IJ＝$\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$である。



5．　(1)　A，B2 人が 1 回ジャンケンをするとき、A が勝つ確率は$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$であり、あいこになる確率は$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$である。

(2)　A, B, C3 人が 1 回ジャンケンをするとき、A1 人だけが勝つ確率は$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$であり、A, B2 人だけが勝つ確率は$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$である。また、あいこになる確率は$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$である。

(3)　A，B，C3 人が 5 回ジャンケンをするとき、3 回はあいこで、残り 2 回は 2 人だけが勝つ確率は$\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$であり、3 回はあいこで、残り 2 回のうち 1 回は 1 人だけが勝ち、1 回は 2 人だけが勝つ確率は$\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテト}}}$である。

(4)　A，B，C3 人がジャンケンをし、負けた人は次のジャンケンに参加できないものとする。
このとき、3 回のジャンケンで 1 人の勝者が決まる確率は$\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$である。

6．　x の 2 次関数　$y=ax^2+bx-a^2+a+10$ …①　は x＝2 のとき最大値をとる。また、①のグラフを C とすると、C は放物線であり、x 軸と異なる 2 点 A,B で交わる。

このとき、b＝$\boxed{\text{アイ}}$a が成り立ち、a のとり得る値の範囲は$\boxed{\text{ウエ}}$＜a＜$\boxed{\text{オ}}$である。

(1)　AB を 1 辺とする正方形の面積が 18 となるのは a＝$\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$のときである。

(2)　①の最大値が 6 となるとき a＝$\boxed{\text{ケコ}}$である。このとき C の頂点を P とする。3 点 A, B, P から等距離にある点 Q の座標は（$\boxed{\text{サ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$）であり、AQ=BQ=PQ=$\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$である。